

CHAPITRE 1 : NOTIONS DE LOGIQUE

LOGIQUE PROPOSITIONNELLE • QUANTIFICATEURS • TECHNIQUES DE RAISONNEMENT DÉDUCTIF

I | Assertions & Connecteurs Logiques Fondamentaux

1. Notion d'Assertion (ou Proposition)

DÉFINITION : ASSERTION / PROPOSITION

Une **assertion** (ou **proposition**) est un énoncé mathématique doué de sens, qui est soit **vrai** (noté **V** ou 1), soit **faux** (noté **F** ou 0), mais jamais les deux simultanément.

- Exemples : « $2 + 2 = 4$ » (**Vraie**) • « $2 \times 3 = 7$ » (**Fausse**) • « Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » (**Vraie**).
- Les énoncés « Il pleut » ou « Je suis plus grand que toi » dépendent du contexte.

2. Les Connecteurs Logiques Élémentaires

- La Négation ($\bar{P}$)** : L'assertion $\bar{P}$ (se lit « P barre » ou « non P ») est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.
- La Conjonction « et » (P et Q ou $P \wedge Q$)** : Vraie lorsque P et Q sont **simultanément vraies**. Fausse sinon.
Exemple : Si P : « Cette carte est un as » et Q : « Cette carte est cœur », alors « P et Q » est vraie uniquement pour l'**as de cœur**.
- La Disjonction « ou » (P ou Q ou $P \vee Q$)** : Vraie si **au moins l'une** des assertions P ou Q est vraie. Fausse si P et Q sont fausses.
Exemple : « P ou Q » est vraie si la carte est un as ou un cœur (vraie pour l'as de pique, pour le roi de cœur et pour l'as de cœur).

Remarque fondamentale : En mathématiques, le connecteur « ou » est **inclusif** (il est vrai quand les deux assertions sont vraies). Il ne doit pas être confondu avec le « ou exclusif » du langage usuel (« fromage *ou* dessert », l'un ou l'autre mais pas les deux).

3. L'Implication ($\Rightarrow$) et l'Équivalence ($\Leftrightarrow$) Logiques

IMPLICATION LOGIQUE ($\Rightarrow$)

L'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est par définition l'assertion :

« $\bar{P}$ ou Q »

Règle d'or : $P \Rightarrow Q$ est **fausse uniquement quand P est vraie et Q est fausse**. Dès que P est fausse, elle est **VRAIE**.

- $0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$ (**Vraie**).
- $x \in]-\infty, -4[\Rightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$ (**Vraie**).
- $\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$ (**Fausse**, ex: $\theta = 2\pi$).
- $2 + 2 = 5 \Rightarrow \sqrt{2} = 2$ (**Vraie !** prémisse fausse).

ÉQUIVALENCE LOGIQUE ($\Leftrightarrow$)

L'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » est définie par :

« $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ »

Règle d'or : Elle est **vraie** lorsque P et Q ont la même valeur logique (toutes deux vraies ou toutes deux fausses).

- $\forall x, x' \in \mathbb{R} : x \cdot x' = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x' = 0)$ (**Vraie**).
- « $P \Leftrightarrow \bar{P}$ » est **toujours fausse**.

Lecture : « P si et seulement si Q ». P est condition nécessaire et suffisante pour Q .

4. Table Synthétique Comparative des Connecteurs Logiques

P	Q	$\bar{P}$	P et Q ($P \wedge Q$)	P ou Q ($P \vee Q$)	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

II | Lois Logiques Fondamentales (Tautologies)

PROPOSITION 1 : LES 8 ÉQUIVALENCES FONDAMENTALES

- $P \Leftrightarrow \bar{\bar{P}}$ (Involutivité)
- $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ (Commutativité)
- $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ (Associativité)
- $\bar{P \text{ et } Q} \Leftrightarrow \bar{P} \text{ ou } \bar{Q}$ (1ère Loi de De Morgan)
- $\bar{P \text{ ou } Q} \Leftrightarrow \bar{P} \text{ et } \bar{Q}$ (2ème Loi de De Morgan)
- $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (Distributivité)
- $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (Distributivité)
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ (Contraposition)

Démonstrations des Lois Logiques Clés & Pratique

DÉMONSTRATIONS TYPES DE LA PROPOSITION 1

1. Démonstration de la loi de De Morgan (4) par table de vérité comparée :

P	Q	$P \text{ et } Q$	$\overline{P \text{ et } Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Les colonnes $\overline{P \text{ et } Q}$ et $\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$ sont strictement identiques pour toutes les valeurs : l'équivalence est prouvée.

2. Démonstration de la distributivité (6) par disjonction sur P :

Si P est **Vraie** : $P \wedge (Q \vee R) \equiv Q \vee R$ et $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \equiv Q \vee R$. Les deux membres coïncident.

Si P est **Fausse** : $P \wedge (Q \vee R) \equiv \mathbf{F}$ et $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \equiv \mathbf{F} \vee \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$. Les deux membres coïncident encore.

3. Démonstration algébrique de la contraposition (8) :

$$\overline{Q} \implies \overline{P} \iff \overline{Q} \text{ ou } \overline{P} \iff Q \text{ ou } \overline{P} \iff \overline{P} \text{ ou } Q \iff P \implies Q.$$

Pratique mathématique essentielle : Dans la pratique et les démonstrations de cours, écrire $P \implies Q$ ou $P \iff Q$ sous-entend que l'assertion écrite est un théorème (Vraie). Écrire $P \iff Q$ signifie que P et Q ont la même valeur logique, et non qu'elles sont vraies isolément.

III | Les Quantificateurs Mathématiques

1. QUANTIFICATEUR UNIVERSEL $\forall$

Soit $P(x)$ définie sur E . L'assertion « $\forall x \in E, P(x)$ » est **vraie** si $P(x)$ est vraie pour **tous sans exception** les éléments x de E .

« $\forall x \in [1, +\infty[, x^2 \geq 1$ » (**Vraie**).

« $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ » (**Fausse**, contre-ex: $x = 0$).

« $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ est divisible par 2 » (**Vraie**).

2. QUANTIFICATEUR EXISTENTIEL $\exists$

L'assertion « $\exists x \in E, P(x)$ » est **vraie** dès que l'on peut trouver **au moins un élément** $x \in E$ vérifiant $P(x)$.

« $\exists x \in \mathbb{R}, x(x-1) < 0$ » (**Vraie**, ex: $x = \frac{1}{2}$).

« $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 - n > n$ » (**Vraie**, ex: $n = 3$).

« $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ » (**Fausse** dans $\mathbb{R}$).

3. QUANTIFICATEUR D'UNICITÉ $\exists!$

La notation « $\exists! x \in E, P(x)$ » affirme qu'il existe un élément $x \in E$ vérifiant $P(x)$, et que cet élément est **le seul et unique**.
Exemple canonique : « $\exists! x \in \mathbb{R}, 2x + 4 = 0$ » est vraie (l'unique solution est $x = -2$).

4. Négation des Propositions Quantifiées

RÈGLES DE NÉGATION DE MORGAN

$\overline{\forall x \in E, P(x)} \iff \exists x \in E, \overline{P(x)}$

$\overline{\exists x \in E, P(x)} \iff \forall x \in E, \overline{P(x)}$

Pour « $\forall x \in [1, +\infty[, x^2 \geq 1$ », la négation est : « $\exists x \in [1, +\infty[, x^2 < 1$ ».

Pour « $\exists z \in \mathbb{C}, z^2 + z + 1 = 0$ », la négation est : « $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 + z + 1 \neq 0$ ».

Pour « $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \in \mathbb{Z}$ », la négation est : « $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \notin \mathbb{Z}$ ».

Propositions imbriquées : Pour $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, (x + y > 10)$, la négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, (x + y \leq 10)$.

Règles de Rigueur, Pièges Fréquents & Auto-Évaluation

ATTENTION : LES 4 PIÈGES CLASSIQUES À ÉVITER

- L'ordre des quantificateurs est capital** : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x + y > 0)$ et $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x + y > 0)$ sont **totale-ment différentes** ! La 1ère est **VRAIE** ($y = -x + 1$ dépend de x) ; la 2nde est **FAUSSE** (aucun réel fixe y ne peut dépasser l'opposé de tous les nombres réels à la fois).
Analogie parlante : « Chaque individu possède un numéro de téléphone » (Vrai) $\neq$ « Un seul et même numéro appartient à tous les individus » (Faux).
- Négation des inégalités** : $\overline{x < y} \iff x \geq y$ et $\overline{x \leq y} \iff x > y$. Toujours penser à transformer l'inégalité stricte en inégalité large !
- Symboles strictement interdits** : Les notations $\nexists$ et $\nRightarrow$ **n'existent absolument pas** en mathématiques.
- Règle d'or de rédaction** : Ne jamais employer les quantificateurs comme de simples abréviations au milieu d'un texte littéraire. Dans une déduction rédigée, préférez toujours le mot « **donc** » ou « **par conséquent** » plutôt que le symbole « $\implies$ ».

MINI-EXERCICES D'AUTO-ÉVALUATION

- Dresser la table de vérité du « *ou exclusif* » (XOR).
- Écrire la table de vérité de « $\overline{P \wedge Q}$ ».
- Donner la négation formelle de « $P \implies Q$ ».
- Démontrer que $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
- Nier l'assertion : P et (Q ou R).
- Écrire avec quantificateurs : « *Tout réel a un carré positif* » et donner sa négation.

IV | Méthodes Fondamentales de Raisonnement Mathématique (Partie 1)

1. Le Raisonnement Direct

PRINCIPE DU RAISONNEMENT DIRECT

Pour démontrer que l'assertion « $P \implies Q$ » est vraie, on **suppose que P est vraie** et on démontre, par une succession rigoureuse d'implications et de déductions logiques, que **Q est vraie**.

EXEMPLE 1 : SOMME DE DEUX RATIONNELS

Énoncé : Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$, alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

Démonstration rédigée modèle : Supposons $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$. Par définition des rationnels :

$\exists p, p' \in \mathbb{Z}$ et $\exists q, q' \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$.

Calculons alors la somme : $a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$.

Posons $p'' = pq' + qp'$ et $q'' = qq'$. Puisque $p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{N}^*$, on a bien $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{N}^*$, ce qui prouve rigoureusement que $a + b \in \mathbb{Q}$. ■

2. Raisonnement par Disjonction des Cas (Cas par Cas)

PRINCIPE DE LA DISJONCTION DES CAS

Pour vérifier une propriété $P(x)$ pour tout $x \in E$, on partitionne E en sous-ensembles disjoints dont la réunion est E (ex. A et $\overline{A}$) et on démontre la propriété séparément dans chaque cas.

EXEMPLE 2 : INÉGALITÉ AVEC VALEUR ABSOLUE

Énoncé : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Démonstration rédigée modèle : Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons deux cas selon le signe de $(x - 1)$:

• **1er cas** : $x \geq 1$. Alors $|x - 1| = x - 1$. Calculons la différence :

$$(x^2 - x + 1) - |x - 1| = (x^2 - x + 1) - (x - 1) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0 \implies x^2 - x + 1 \geq |x - 1|.$$

• **2ème cas** : $x < 1$. Alors $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$. Calculons la différence :

$$(x^2 - x + 1) - |x - 1| = (x^2 - x + 1) - (-x + 1) = x^2 \geq 0 \implies x^2 - x + 1 \geq |x - 1|.$$

Conclusion : Dans tous les cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$. ■

3. RAISONNEMENT PAR CONTRAPOSITION

Pour prouver « $P \implies Q$ », on démontre sa contraposée équivalente :

$$\ll \overline{Q} \implies \overline{P} \gg$$

Exemple 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer : n^2 pair $\implies n$ pair.

Dém : Par contraposition, supposons n impair : $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$.

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\ell + 1.$$

Donc n^2 est impair. Par suite, si n^2 est pair, n est pair. ■

4. RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Pour prouver « $P \implies Q$ », on suppose P vraie et Q fausse ($\overline{Q}$ vraie), et on aboutit à une **contradiction**.

Exemple 4 : Soient $a, b \geq 0$. Montrer : $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \implies a = b$.

Dém : Supposons par l'absurde que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.
 $a(1+b) = b(1+a) \iff a^2 - b^2 = b - a \iff (a-b)(a+b) = -(a-b)$.

Comme $a \neq b$, on a $a - b \neq 0 \implies a + b = -1$.

Contradiction car $a \geq 0$ et $b \geq 0 \implies a + b \geq 0$. Donc $a = b$. ■

5. Raisonement par Contre-Exemple

PRINCIPE DU CONTRE-EXEMPLE

Pour prouver qu'une assertion universelle « $\forall x \in E, P(x)$ » est **FAUSSE**, il suffit d'exhiber **un seul** élément $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse.

Exemple 5 : Réfuter « *Tout entier positif est la somme de trois carrés d'entiers* » ($0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$).

Réfutation : Le nombre 7 constitue un contre-exemple. Les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4. Aucune somme de trois de ces carrés ne vaut 7 (les sommes maximales étant $4 + 1 + 1 = 6$ ou $4 + 4 + 0 = 8$). L'assertion est donc fausse. ■

6. Raisonement par Récurrence

PRINCIPE DU RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

- Initialisation :** Vérifier que la propriété est vraie au rang initial : $P(n_0)$ est vraie.
- Hérédité :** Fixer un entier $n \geq n_0$. On suppose que $P(n)$ est vraie (*Hypothèse de Récurrence HR*), et on démontre sous cette hypothèse que la propriété au rang suivant $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion :** Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

EXEMPLE 6 : INÉGALITÉ FONDAMENTALE $2^N > N$

Énoncé : Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2^n > n$.

Démonstration rédigée modèle : Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ la propriété : « $2^n > n$ ».

- Initialisation ($n = 0$) :** Pour $n = 0$, $2^0 = 1$ et $1 > 0$, donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité :** Fixons un entier $n \geq 0$. Supposons $2^n > n$ (HR). Montrons que $2^{n+1} > n+1$:
 $2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n > n + 2^n$ (d'après l'HR).
Comme $n \geq 0$, on a $2^n \geq 2^0 = 1$, d'où $n + 2^n \geq n + 1$. Par suite, $2^{n+1} > n + 1$, ce qui prouve l'hérédité.
- Conclusion :** D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$. ■

V | Série d'Exercices d'Entraînement & de Synthèse

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT AUX RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES

- (Raisonnement direct) :** Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leq b$, alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
- (Disjonction des cas) :** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer n pair et n impair).
- (Contraposition ou Absurde) :** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (on admet que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
- (Raisonnement par l'absurde) :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que le nombre $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier rationnel.
- (Contre-exemple) :** L'assertion : « *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x < 2 \implies x^2 < 4$* » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
- (Récurrence classique) :** Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- (Récurrence – Inégalité de Bernoulli) :** Soit un réel fixe $x \geq 0$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.