

SÉRIE D'EXERCICES N° 01 : NOTIONS DE LOGIQUE
LOGIQUE PROPOSITIONNELLE • QUANTIFICATEURS • TECHNIQUES DE RAISONNEMENT DÉDUCTIF

Exercice 1 (Négations et Valeurs de vérité) Donner la négation $\overline{P}$ et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1) $P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}), x^2 > 0$

2) $P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}), x^2 - 2 = 0$

3) $P_3 : x \in [1; 2[$

4) $P_4 : (\forall n \in \mathbb{N}), \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$

5) $P_5 : (\forall x \in \mathbb{R}), -1 \leq \cos(x) \leq 1$

6) $P_6 : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}), n < m$

7) $P_7 : (\exists n \in \mathbb{N}), 2n + 1$ est pair

8) $P_8 : (\forall n \in \mathbb{N}), \sqrt{n} \in \mathbb{N}$

9) $P_9 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), y - x > 0$

10) $P_{10} : (\exists! x \in \mathbb{R}), 2x + 4 = 0$

11) $P_{11} : (\exists! x \in \mathbb{R}), x^2 = 2$

12) $P_{12} : (\exists x \in \mathbb{Z}), \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$

13) $P_{13} : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), y^2 = x$

Exercice 2 (Traduction symbolique) Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions :

- Le carré de tout réel est positif ou nul.
- Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
- Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
- Il existe un entier multiple de tous les autres.
- Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Exercice 3 (Implication d'inégalités) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2 \end{cases} \implies \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$$

Exercice 4 (Résolution et implication) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \implies x = 0$$

Exercice 5 (Sommes nulles)

- Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 0 \implies a = 0$ et $b = 0$.
- Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :
 $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \implies x = y = 1$.

Exercice 6 (Majoration) Montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1 \implies |a + b| \leq \sqrt{2}$$

Exercice 7 (Ensemble $\mathbb{Q}$) Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

Exercice 8 (Encadrement rationnel) Soit $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$. Montrer que :

$$|x - 1| \leq \frac{1}{2} \implies \frac{1}{4}|x - 1| \leq |f(x) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|x - 1|$$

Exercice 9 (Quotients d'entiers) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 10 (Inégalité avec racine) Montrer que pour tout $x \in [-2; 2]$, on a :

$$2\sqrt{2} > \sqrt{4 - x^2}$$

Exercice 11 (Valeur absolue et trinôme) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 12 (Inéquation avec radical) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$(E) : 1 - \frac{x}{4} > \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Exercice 13 (Inéquation avec valeur absolue) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(I_1) : |x - 1| + 2x - 3 \geq 0$$

Exercice 14 (Positivité stricte) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$.

Exercice 15 (Équation avec valeur absolue) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E_1) : x^2 - |x - 2| + 5 = 0$$

Exercice 16 (Divisibilité) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le produit $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.

Exercice 17 (Contraposée à deux variables) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$(x \neq 2 \text{ et } y \neq 2) \implies 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$$

Exercice 18 (Fraction rationnelle) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Montrer par contraposition que :

$$x \neq -8 \implies \frac{x+2}{x+5} \neq 2$$

Exercice 19 (Parité d'un carré) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par contraposition que si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 20 (Raisonnement par contraposée) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x \neq y \implies (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

Exercice 21 (Disjonction et divisibilité) Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que le produit $n \times p$ est pair ou bien $n^2 - p^2$ est un multiple de 8.

Exercice 22 (Raisonnement par l'absurde) Soient $a, b > 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$, alors $a = b$.

Exercice 23 (Non-majoration) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$. Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de réel positif M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.

Exercice 24 (Irrationalité de $\sqrt{2}$) Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 25 (Corps $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$) Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$.

- Montrer que : $a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0$.
- En déduire que : $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \implies a = a' \text{ et } b = b'$.

Exercice 26 (Principe de parité) Soit $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec n un entier impair et les x_i des éléments de A distincts deux à deux. Montrer par l'absurde que : $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i - i$ soit pair.

Exercice 27 (Contre-exemple sur $[0; 1]$) Montrer que la proposition suivante est fausse :

$$P : (\forall x \in [0; 1]), x^2 \geq x$$

Exercice 28 (Contre-exemple sur $\mathbb{R}^2$) Montrer que la proposition suivante est fausse :

$$P : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), x^2 + y^2 \geq x + y$$

Exercice 29 (Non-linéarité de la racine) Montrer que la proposition :
« $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ » est fausse.

Exercice 31 (Inégalité sur $\mathbb{R}^*$) Montrer que la proposition : « $\forall x \in \mathbb{R}^*, x + \frac{1}{x} \geq 2$ » est fausse.

Exercice 33 (Sommes et inégalités) Montrer que la proposition suivante est fausse :

$$P : \forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, (a \neq b \text{ et } c \neq d) \implies a + c \neq b + d$$

Exercice 35 (Inégalité arithmético-géométrique) Démontrer que pour tout réel $x > 0$:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Exercice 37 (Équation irrationnelle) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) : \sqrt{x^2 + 1} = 2x$$

Exercice 39 (Sommes nulles et radicaux)

- Montrer : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, a + b = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$.
- Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :
 $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \iff x = y = 0$.

Exercice 30 (Somme de trois carrés) Réfuter par un contre-exemple l'affirmation : « *Tout entier positif est somme de trois carrés parfaits* ».

Exercice 32 (Parité de fonction) Soit $f(x) = 2x^2 - x + 3$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est ni paire ni impaire.

Exercice 34 (Forme quadratique) Montrer que : $P : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), x^2 - xy + y^2 = 0$ est fausse.

Exercice 36 (Double équivalence) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$|x - 1| \leq \frac{1}{2} \iff \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x + 1} \leq \frac{2}{3}$$

Exercice 38 (Inégalité quadratique) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$|x - y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + xy}$$

Exercice 40 (Récurrence linéaire) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$3^n \geq 1 + 2n$$

Exercice 41 (Somme des entiers) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$
 $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 43 (Divisibilité par 3) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ est divisible par 3.

Exercice 45 (Somme des cubes) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 47 (Divisibilité par 9) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 49 (Erreur classique de récurrence) On pose $P(n)$:
 $10^n - 1$ divisible par 9 et $Q(n)$: $10n + 1$ divisible par 9.
 1. Montrer que $P(n) \implies P(n+1)$ et $Q(n) \implies Q(n+1)$.
 2. Un élève affirme : « Donc $P(n)$ et $Q(n)$ sont vraies sur $\mathbb{N}$ ».
 Pourquoi a-t-il tort ?
 3. Prouver que $P(n)$ est vraie et $Q(n)$ fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 51 (Stabilité de $] -1; 1[$) Soient $a, b \in] -1; 1[$. Montrer que :

$$-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$$

Exercice 53 (Tiers exclu) À l'aide d'une table de vérité, montrer que la formule $P \vee \overline{P}$ est une tautologie.

Exercice 42 (Inégalité $2^n \geq 6n$) Montrer par récurrence que :
 $\forall n \geq 5, 2^n \geq 6n$.

Exercice 44 (Somme des carrés) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 46 (Somme des impairs) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Exercice 48 (Divisibilité par 6) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercice 50 (Nécessité de l'initialisation) Soit $P(n)$: $7^n - 1$ est divisible par 3.
 1. Montrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
 2. Que peut-on conclure sur la validité générale de $P(n)$?

Exercice 52 (Phrases logiques) Traduire en langage courant, donner la négation et la valeur de vérité :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), x > y$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), x > y$
- $(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 \geq 4 \implies x \geq 2$
- $(\exists x \in \mathbb{R}), x^2 = 4$

Exercice 54 (Synthèse des raisonnements)

- (Direct)** $a \leq b \implies a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
- (Cas par cas)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2.
- (Absurde)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.
- (Contre-ex)** $x < 2 \implies x^2 < 4$ est-elle vraie ?
- (Récurrence)** Soit $a > 0$, montrer $(1+a)^n \geq 1+na$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron. C'est en s'entraînant régulièrement que l'on devient mathématicien. »